

ЗАДАЧИ

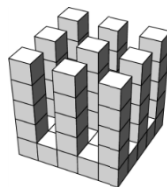
Для решения задач отводится **75 минут**

11-12-ые классы

- Калькулятором пользоваться не разрешается.
- Для каждой задачи только один из приведенных пяти ответов является верным.
- За нерешенную задачу очки не отнимаются и не прибавляются.
- Участник конкурса может набрать максимально 120 баллов.
- После завершения конкурса листок с задачами остается у участника.
- Главное требование от участников и организаторов конкурса – выполнить задания самостоятельно и честно.

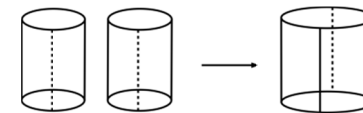
Задачи, оцениваемые в 3 балла

- Если из куба $5 \times 5 \times 5$ убрать некоторое количество кубиков $1 \times 1 \times 1$, то получится фигура, состоящая из колонн одинаковой высоты, которые стоят на цельном основании (см. рисунок). Сколько маленьких кубиков было убрано?
(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80
- Сегодня день рождения Карине, Анаит и Лилит. Сумма их возрастов сейчас равна 44. Чему будет равна сумма их возрастов в следующий раз, когда она снова будет двузначным числом с одинаковыми цифрами?
(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99
- Чему равно число a^{-3b} , если $a^b = \frac{1}{2}$?
(A) $\frac{1}{8}$ (B) 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$
- 48 мячей разложены в трех ящиках различных размеров. Сумма количества мячей в меньшем и большем ящиках в два раза больше количества мячей в среднем ящике. Количество мячей в меньшем ящике в два раза меньше количества мячей в среднем ящике. Сколько мячей в наибольшем ящике?
(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32
- $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = ?$
(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 (E) 2
- Какое из приведенных выражений не содержит множитель $b + 1$?
(A) $2b + 2$ (B) $b^2 - 1$ (C) $b^2 + b$ (D) $-1 - b$ (E) $b^2 + 1$
- Сколько цифр в записи числа $(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2$?
(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111
- У Гарника есть секретный адрес электронной почты, который знают только его четыре друга. Сегодня он получил 8 писем на этот адрес. Какое из следующих утверждений точно верно?
(A) Гарник получил по два письма от каждого друга.



- (B) Гарник не мог получить все восемь писем от одного из своих друзей.
(C) Гарник получил по крайней мере одно письмо от каждого друга.
(D) Гарник получил по крайней мере два письма от одного из своих друзей.
(E) Гарник получил по крайней мере два письма от двух разных друзей.

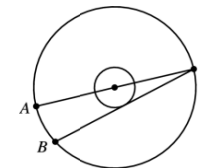
9. Два одинаковых цилиндра разрежали вдоль пунктирных линий и склеили так, что получился один большой цилиндр (см. рисунок). Что можно сказать об отношении объемов большого и одного из маленьких цилиндров?
(A) Отношение равно двум. (B) Отношение равно трем. (C) Отношение равно π.
(D) Отношение равно четырем. (E) Отношение равно восьми.



10. В числе 2014 все цифры разные, и последняя цифра больше суммы трех других. Сколько лет назад такое имело место в последний раз?
(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

Задачи, оцениваемые в 4 балла

- Размер прямоугольного параллелепипеда $a \times b \times c$, где $a < b < c$. Если увеличить a , b или c на заданную положительную величину, то объем параллелепипеда увеличится. В каком из приведенных случаев увеличение объема параллелепипеда будет наибольшим?
(A) Если увеличить a . (B) Если увеличить b . (C) Если увеличить c .
(D) Во всех случаях (A), (B), (C) увеличение будет одним и тем же.
(E) Зависит от величин a , b , c .
- В футбольном матче победитель получает 3 очка, проигравший 0 очков, а в случае ничьи каждая команда получает 1 очко. В турнире участвуют четыре команды – A, B, C и D. Каждая из команд играет три матча: по одному с каждой из остальных команд. В конце турнира команда A набрала 7 очков, команды B и C имели по 4 очка. Сколько очков набрала команда D?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
- Соотношение радиусов двух концентрических окружностей равно 1:3. AC – диаметр большой окружности, BC – хорда большой окружности, касающаяся маленькой. Длина хорды AB равна 12. Чему равен радиус большой окружности?
(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26
- Сколько троек целых чисел (a, b, c) , где $a > b > c > 1$, удовлетворяют неравенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?
(A) ни одна (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) бесконечно много
- a , b , c отличные от нуля числа и n – положительное целое число. Известно, что знаки чисел $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ и $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ совпадают. Какое из приведенных утверждений однозначно верно?
(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

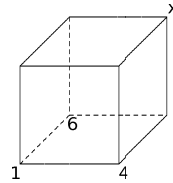


16. Шесть недель составляют $n!$ секунд. Чему равен n ?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

17. Вершины куба пронумерованы цифрами от 1 до 8 таким образом, что сумма цифр, написанных у вершин каждой грани, одна и та же. Числа 1, 4 и 6 уже написаны у некоторых вершин (см. рисунок). Чему равно x ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

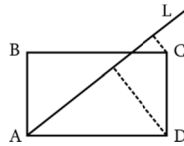


18. На этикетке сливочного сыра написано: жиры – 24%. На той же этикетке написано: жир в сухой массе – 64%. Каково процентное содержание воды в данном сыре?

- (A) 88% (B) 62.5% (C) 49% (D) 42% (E) 37.5%

19. Линия L проходит через вершину A прямоугольника $ABCD$. Расстояние от вершины C до L равно 2, а расстояние от D до L равно 6. Найдите длину AD , если известно, что она в два раза больше AB .

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$



20. Функция $f(x) = ax + b$ удовлетворяет равенствам $f(f(f(1))) = 29$ и $f(f(f(0))) = 2$. Чему равно значение a ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

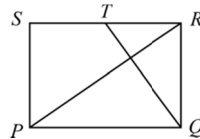
Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. Имеем 10 различных положительных целых чисел, ровно пять из которых делятся на 5 и ровно семь из них делятся на 7. Пусть M наибольшее из этих 10 чисел. Каково наименьшее возможное значение M ?

- (A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 (E) никакое из приведенных чисел

22. $PQRS$ – прямоугольник, T – середина отрезка RS . Отрезок QT перпендикулярен диагонали PR . Чему равно отношение $PQ:QR$?

- (A) 2:1 (B) $\sqrt{3}:1$ (C) 3:2 (D) $\sqrt{2}:1$ (E) 5:4

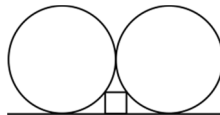


23. 9 кенгуру окрашены или в золотой, или в серебряный цвета. Когда три из этих кенгуру случайно встречаются, то вероятность, что среди них нет серебряного, равен 2:3. Сколько кенгуру окрашены в золотой цвет?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8

24. Квадрат помещен между двумя касающимися равными окружностями радиусом 1 и их общей внешней касательной (см. рисунок). Чему равна сторона квадрата?

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{2}$



25. Артак хочет записать несколько различных друг от друга положительных целых чисел, не превышающих 100. Их произведение не должно делиться на 54. Какое наибольшее количество целых чисел он может написать?

- (A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Два правильных многоугольника со стороной 1 расположены по противоположные стороны их общей стороны AB . Один из них – $ABCD \dots$, является 15-угольником, другой – $ABZY \dots$, n -угольником. При каком значении n длина отрезка CZ будет равна 1?

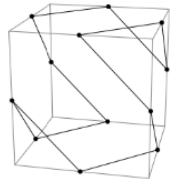
- (A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

27. Положительные целые числа k, m, n удовлетворяют равенствам $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$. Сколько различных значений может иметь число m ?

- (A) ни одного (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) бесконечно много

28. На рисунке показан многоугольник, вершины которого находятся на серединах ребер куба. Внутренний угол этого многоугольника определяется нормальным способом: это угол между двумя сторонами, выходящими из данной вершины. Чему равна сумма всех внутренних углов многоугольника?

- (A) 720 (B) 1080 (C) 1200 (D) 1440 (E) 1800



29. Функция $f: Z \rightarrow Z$ удовлетворяет условиям $f(4) = 6$ и $xf(x) = (x-3)f(x+1)$. Найдите численное значение $f(4)f(7)f(10) \dots f(2011)f(2014)$.

- (A) 2013 (B) 2014 (C) $2013 \cdot 2014$ (D) $2013!$ (E) $2014!$

30. По лесам волшебного острова бродят три вида животных: львы, волки и козы. Волки могут съесть коз, а львы могут съесть волков или коз. Это волшебный остров, и если волк съедает козу, он превращается во льва. Если лев съедает козу, он превращается в волка, а если же лев съедает волка, он превращается в козу. Первоначально на острове было 17 коз, 55 волков и 6 львов. Чему равно наибольшее возможное число животных, которые могут остаться на острове после того, как уже ни одно животное не может съесть кого-либо другого?

- (A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35