

## ЗАДАЧИ

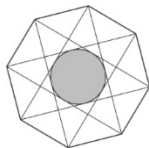
Для решения задач отводится **75 минут**

**11-12-ые классы**

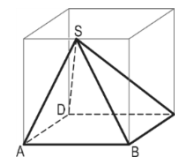
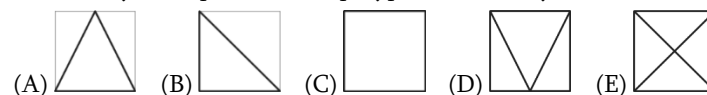
- калькулятором пользоваться не разрешается
- для каждой задачи только один из приведенных пяти ответов является верным
- за нерешенную задачу очки не отнимаются и не прибавляются
- участник конкурса может набрать максимально 120 баллов
- после завершения конкурса листок с задачами остается у участника
- главное требование от участников и организаторов конкурса – выполнить задания самостоятельно и честно.

### Задачи, оцениваемые в 3 балла

1. Которое из приведенных чисел наибольшее?  
(A) 2013 (B)  $2^{0+13}$  (C)  $20^{13}$  (D)  $201^3$  (E) 20·13
2. Сторона правильного восьмиугольника, показанного на рисунке, равна 10 см. Чему равен радиус серой окружности, вписанной в маленький восьмиугольник, образованный указанными диагоналями заданного восьмиугольника?  
(A) 10 см (B) 7,5 см (C) 5 см (D) 2,5 см (E) 2 см
3. У призмы в целом есть 2013 граней. Сколько ребер имеет эта призма?  
(A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033
4. Кубический корень из  $(3)^{3^3}$  равен:  
(A)  $3^3$  (B)  $(3)^{3^3-1}$  (C)  $(3)^{2^3}$  (D)  $(3)^{3^2}$  (E)  $(\sqrt{3})^3$
5. Год 2013 обладает тем свойством, что его число состоит из последовательных цифр 0, 1, 2 и 3. Сколько лет прошло с момента, когда в последний раз число года состояло из четырех последовательных цифр?  
(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990
6. Пусть  $f$  линейная функция, для которой  $f(2013) - f(2001) = 100$ . Чему равно число  $f(2031) - f(2013)$ ?  
(A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180
7. Если известно, что  $2 < x < 3$ , то сколько из приведенных утверждений верно?  
 $4 < x^2 < 9$ ,  $4 < 2x < 9$ ,  $6 < 3x < 9$ ,  $0 < x^2 - 2x < 3$ .  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4
8. Шесть супергероев поймали 20 злодеев. Первый поймал одного злодея, второй двух, а третий трех злодеев. Четвертый супергерой поймал больше злодеев, чем любой из остальных пяти. Какое наименьшее число злодеев мог поймать четвертый супергерой?  
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3
9. На рисунке приведен куб, внутри которого находится твердая, непрозрачная пирамида ABCDS с основанием ABCD, а вершина S пирамиды находится в середине ребра куба. Вы



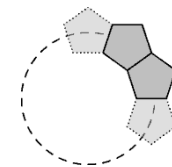
смотрите на эту пирамиду сверху, снизу, сзади, спереди, справа и слева. Какую из приведенных фигур невозможно увидеть?



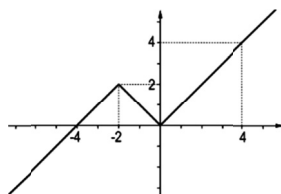
10. При плавлении некоторого твердого вещества его объем увеличился на  $\frac{1}{12}$  изначального объема. На какую долю объема полученного жидкого вещества уменьшится его объем при затвердевании?  
(A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{1}{11}$  (C)  $\frac{1}{12}$  (D)  $\frac{1}{13}$  (E)  $\frac{1}{14}$

### Задачи, оцениваемые в 4 балла

11. У Рубена имеются одинаковые пластмассовые фигуры в форме правильного пятиугольника. Он склеивает эти фигуры сторона к стороне так, чтобы получилась полная окружность, как показано на рисунке. Сколько пятиугольников есть на этой окружности?  
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15
12. Сколько существует таких натуральных чисел  $n$ , для которых как  $\frac{n}{3}$ , так и  $3n$  трехзначные числа?  
(A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300
13. Круглый ковер постелен на пол, покрытый квадратными плитками. Все плитки, которые имеют более одной общей точки с ковром, окрашивают в серый цвет. Какую из приведенных картинок невозможно получить в результате?  
(A) (B) (C) (D) (E)
14. Рассмотрим следующее утверждение о функции  $f$  на множестве целых чисел: «Для любого четного числа  $x$ ,  $f(x)$  четное». Каково будет отрицание этого утверждения?  
(A) Для любого четного  $x$ ,  $f(x)$  нечетное.  
(B) Для любого нечетного  $x$ ,  $f(x)$  четное.  
(C) Для любого нечетного  $x$ ,  $f(x)$  нечетное.  
(D) Существует четное  $x$ , для которого  $f(x)$  не является четным.  
(E) Существует нечетное число  $x$ , для которого  $f(x)$  нечетное.
15. Дана функция  $W(x) = (a - x)(b - x)^2$ , где  $a < b$ . На каком из приведенных рисунков представлен ее график?  
(A) (B) (C) (D) (E)
16. Рассмотрим прямоугольник, длина одной из сторон которого 5 см. Прямоугольник можно разрезать на квадрат и прямоугольник. Одна из этих фигур имеет площадь 4 см<sup>2</sup>. Сколько таких прямоугольников существует?  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

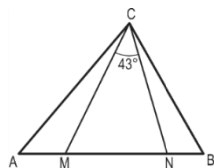


17. Вардан нарисовал график функции  $f: R \rightarrow R$ , состоящий из двух лучей и отрезка (см. рисунок). Сколько решений имеет уравнение  $f(f(f(x))) = 0$ ?



- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

18. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  так, что  $AN = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите величину угла  $\angle ACB$ , если  $\angle MCN = 43^\circ$ .



- (A)  $86^\circ$  (B)  $89^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $92^\circ$  (E)  $94^\circ$

19. Сколько пар натуральных чисел  $(x, y)$  удовлетворяют уравнению  $x^2 y^3 = 6^{12}$ ?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) иное число

20. В коробке имеется 900 карт, пронумерованных от 100 до 999. Любые две карты имеют разные номера. Вазген вынимает карты и определяет сумму цифр номера на каждой из них. Самое меньшее сколько карт он должен взять, чтобы быть уверенным, что имеет три карты с одной и той же суммой?

- (A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55

**Задачи, оцениваемые в 5 баллов**

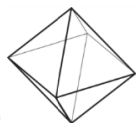
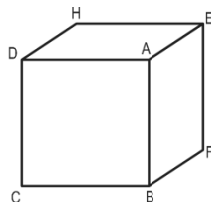
21. Сколько существует пар  $(x, y)$  целых чисел, для которых  $x \leq y$  и произведение этих чисел в 5 раз больше их суммы?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Пусть функция  $f: R \rightarrow R$  определяется следующим образом:  $f$  – периодическая, с периодом 5, и на множестве  $[-2, 3]$   $f$  определяется согласно  $x \mapsto f(x) = x^2$ . Чему равно число  $f(2013)$ ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

23. Сплошной куб, представленный на рисунке, разрезают плоскостью, проходящей через три соседние с  $A$  вершины  $D$ ,  $E$  и  $B$ . Аналогично, куб разрезают плоскостями, проходящими через три соседние вершины всех семи других вершин. Как будет выглядеть после этих действий кусок, содержащий центр куба?



- (A) (B) (C) (D) (E) Центр куба не принадлежит ни к одному из приведенных фигур.

24. Сколько решений  $(x, y)$  имеет уравнение  $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ , где  $x$  и  $y$  действительные числа?

- (A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) Бесконечно много.

25. Пусть функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  для натуральных  $n$  определена следующим образом:  $f(n) = \frac{n}{2}$ , если  $n$  четно,  $f(n) = \frac{n-1}{2}$ , если  $n$  нечетно. Для натуральных  $k$   $f^k(n)$  определяется как  $f(f(\dots f(n)\dots))$ , где  $f$  повторяется  $k$  раз. Сколько решений имеет уравнение  $f^{2013}(n) = 1$ ?

- (A) 0 (B) 4026 (C)  $2^{2012}$  (D)  $2^{2013}$  (E) Бесконечно много решений.

26. На плоскости нарисовано несколько прямых линий. Линия  $a$  пересекает ровно три прямые линии, линия  $b$  пересекает ровно четыре прямые линии. Линия  $c$  пересекает ровно  $n$  прямых линий, причем  $n \neq 3, 4$ . Определите число прямых линий, нарисованных на плоскости.

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) другое число

27. Сумма первых  $n$  натуральных чисел трехзначное число, все цифры которого одинаковы. Чему равна сумма цифр числа  $n$ ?

- (A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

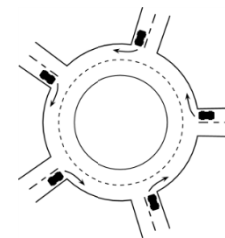
28. На острове рыцарей и мошенников живут только два типа людей: рыцари, которые всегда говорят правду, и мошенники, которые всегда лгут. На острове я встретил двух жителей и спросил высокого из мужчин, рыцари ли они оба? Он ответил, но я не смог понять, кто они. Поэтому я спросил невысокого человека, рыцарь ли высокий мужчина? Из его ответа я узнал, к какому типу они принадлежали. Были ли мужчины рыцарями или мошенниками?

- (A) Они оба были рыцарями.  
 (B) Они оба были мошенниками.  
 (C) Высокий был рыцарем, а невысокий был мошенником.  
 (D) Высокий был мошенником, а невысокий был рыцарем.  
 (E) Недостаточно информации.

29. Гоар написала алгоритм для создания последовательности чисел:  $a_1 = 1$ ,  $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ , где  $m$  и  $n$  натуральные числа. Найдите значение  $a_{100}$ .

- (A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. Пять автомобилей одновременно въезжают на круговую дорогу с разных въездов, как показано на рисунке. Каждая из машин совершает меньше одного круга и никакие два автомобиля не выезжают с дороги по одному и тому же выезду. Сколькими различными способами автомобили могут выехать с круговой дороги?



- (A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120