

ЗАДАЧИ

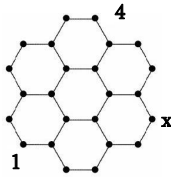
Для решения задач отводится **75 минут**

11-ый класс

- калькулятором пользоваться не разрешается
- для каждой задачи только один из приведенных пяти ответов является верным
- за нерешенную задачу очки не отнимаются и не прибавляются
- участник конкурса может набрать максимально 120 баллов
- после завершения конкурса листок с задачами остается у участника
- главное требование от участников и организаторов конкурса – выполнить задания самостоятельно и честно.

Задачи, оцениваемые в 3 балла

1. В каждой точке решетки, показанной на рисунке, должно быть написано число таким образом, чтобы сумма чисел на концах каждого отрезка была одинаковой. Два числа уже написаны. Какое число будет в точке, помеченной буквой x ?



(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) информации недостаточно

2. В автогонке участвовали три спортсмена: Карен, Виген и Арсен. Сразу же после начала, Карен был первым, Виген был вторым, Арсен третьим. Во время гонки, Карен и Виген обогнали друг друга 9 раз, Виген и Арсен - 10 раз, а Карен и Арсен - 11 раз. В каком порядке они закончили гонку?

(A) Карен, Виген, Арсен (B) Виген, Арсен, Карен
(C) Арсен, Карен, Виген (D) Арсен, Виген, Карен
(E) Виген, Карен, Арсен

3. Дано, что $2^x = 15$ и $15^y = 32$. Чему равно значение $x \cdot y$?

(A) 5 (B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ (C) $\log_2 47$ (D) 7 (E) $\sqrt{47}$

4. Во время езды на машине по неровной дороге Лилит пыталась нарисовать карту своей родной деревни. Ей удалось нарисовать четыре улицы, их семь пересечений и дома своих друзей. Однако, в действительности улицы «Стрела», «Гвоздь» и «Линейка» прямые, а четвертая улица называется «Кривая». Кто живет на Кривой улице?

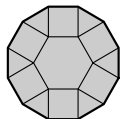


(A) Давид (B) Гаяне (C) Бабкен (D) Анна
(E) для ответа необходима более четкая карта

5. Все четырехзначные числа, сумма цифр которых равна 4, написаны в порядке убывания. На каком месте в этом списке находится число 2011?

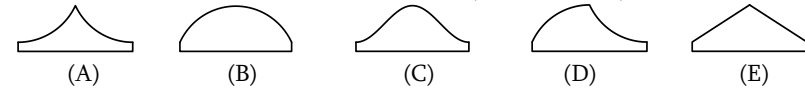
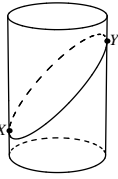
(A) 6-ом (B) 7-ом (C) 8-ом (D) 9-ом (E) 10-ом

6. На рисунке показана фигура, состоящая из правильного шестиугольника со стороной, равной единице, шести треугольников и шести квадратов. Чему равен периметр этой фигуры?

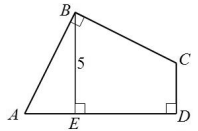


(A) $6(1 + \sqrt{2})$ (B) $6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (C) 9 (D) $6 + 3\sqrt{2}$ (E) 12

7. Прямоугольный лист бумаги оборачивают вокруг цилиндра и разрезают плоскостью, проходящей через цилиндр и бумагу. Плоскость проходит через точки X и Y , как показано на рисунке. Затем нижнюю часть листа разворачивают. Какая из картин может получиться в результате?



8. На рисунке показан четырехугольник, в котором $AB = BC$, $BE \perp AD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $BE = 5$. Чему равна площадь $ABCD$?



(A) 20 (B) 22,5 (C) 25 (D) 27,5 (E) 30

9. Арам написал на доске все нечетные числа от 1 до 2011, а затем Бабкен стер все числа, кратные 3. Сколько чисел осталось на доске?

(A) 335 (B) 336 (C) 671 (D) 1005 (E) 1006

10. Месроп и Вартан бросают несколько игральных костей, чтобы решить, кто будет первым прыгать в холодное озеро. Если среди выпавших чисел нет шестерки, прыгать будет Месроп, если имеется только одна шестерка, прыгать будет Вартан, а если выпадут два или более шестерок, они не будут плавать в этот день. Сколько костей они должны бросить, если хотят, чтобы риск прыгать в воду первым был для них одинаковым?

(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) 17

Задачи, оцениваемые в 4 балла

11. Необходимо три прямоугольника объединить в большой прямоугольник без пробелов или наложений. Один из трех прямоугольников имеет размер 7 на 11, другой имеет размер 4 на 8. Третий прямоугольник выбирается так, чтобы его площадь была максимально большой. Каковы размеры третьего прямоугольника?

(A) 1 на 11 (B) 3 на 4 (C) 3 на 8 (D) 7 на 8 (E) 7 на 11

12. Мариам хочет написать в каждой клетке таблицы 3×3 целые числа так, чтобы сумма чисел во всех квадратах 2×2 равнялась 10. Четыре числа уже написаны (см. рис). Найдите сумму остальных пяти чисел.

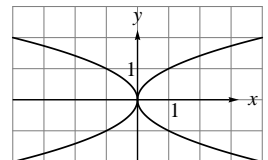
	2	
1		3
	4	

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) ни одно из приведенных

13. 48 детей отправились в поход на лыжах. Шестерых из них в походе сопровождал ровно один родственник - брат или сестра, девять детей отправились в поход ровно с двумя, а четверо - ровно с тремя родственниками. Остальные дети отправились в поход без родственников. Сколько семей участвовало в походе?

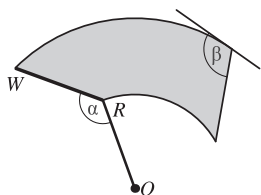
(A) 19 (B) 25 (C) 31 (D) 36 (E) 48

14. Сколько из графиков функций $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$, $y = -\sqrt{|x|}$ включены в фигуру на рисунке?



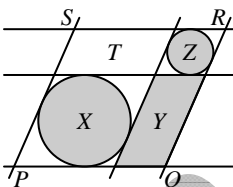
(A) ни один (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) все 8

15. Стеклоочиститель заднего стекла автомобиля построен таким образом, что длины щетки RW и шатуна OR равны и соединены под углом α , который не меняется при работе стеклоочистителя. Стеклоочиститель качается относительно центра O и очищает затененную область, показанную на рисунке. Определить угол β между правым краем очищенной области и касательной к изогнутой верхней кромке.



- (A) $\frac{3\pi - \alpha}{2}$ (B) $\pi - \frac{\alpha}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ (D) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (E) $\pi + \frac{\alpha}{2}$

16. На рисунке показаны три параллельные горизонтальные линии и три параллельные наклонные линии. Каждый из кругов касается четырех линий. Площади затененных областей на рисунке равны X, Y и Z, а W - площадь параллелограмма PQRS. Какое наименьшее число значений площадей X, Y, Z и W необходимо знать, чтобы можно было вычислить площадь T параллелограмма, указанного на рисунке?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) T невозможно вычислить по X, Y, Z и W

17. На плоскости (x, y) оси расположены стандартным образом, а точка A(1, -10) находится на параболе $y = ax^2 + bx + c$. После того, как стерли оси координат и почти всю параболу, осталась фигура, показанная на рисунке.



Какое из следующих утверждений может быть ложным?

- (A) $a > 0$ (B) $b < 0$ (C) $a + b + c < 0$ (D) $b^2 > 4ac$ (E) $c < 0$

18. Стороны PQ, QR, RS, ST, TU и UP шестиугольника касаются общей окружности. Длины сторон PQ, QR, RS, ST и TU равны 4, 5, 6, 7 и 8, соответственно. Чему равна длина стороны UP?

- (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6
(E) длина не может быть вычислена на основании этой информации

19. Найдите сумму всех натуральных чисел x, меньших 100, для которых $x^2 - 81$ кратно 100.

- (A) 200 (B) 100 (C) 90 (D) 81 (E) 50

20. Братья Арсен и Рубен дали правдивые ответы на вопрос о том, сколько членов насчитывает их шахматный клуб. Арсен сказал: «Все члены нашего клуба, за исключением пяти человек, мальчики». Рубен сказал: «В каждой группе из шести членов всегда есть по крайней мере четыре девочки». Сколько членов в шахматном клубе?

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 18

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. В коробке лежат мячи. На каждом из мячей написано одно натуральное число. Все числа различны. На 30 из мячей написаны числа, которые делятся на 6, на 20 из них написаны числа, которые делятся на 7, и на 10 из них написаны числа, делящиеся на 42. Каково наименьшее возможное число мячей в коробке?

- (A) 30 (B) 40 (C) 53 (D) 54 (E) 60

22. Рассмотрим две арифметические прогрессии 5, 20, 35, ..., и 35, 61, 87, Найдите число разных арифметических прогрессий, состоящих из натуральных чисел, которые содержат каждую из заданных последовательностей в качестве подпоследовательности?

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 26 (E) бесконечно много

23. Последовательность числовых функций $f_1(x), f_2(x), \dots$ удовлетворяет следующим двум условиям: (1) $f_1(x) = x$; (2) $f_{n+1} = \frac{1}{1 - f_n(x)}$. Чему равно значение $f_{2011}(2011)$?

- (A) 2011 (B) $-\frac{1}{2010}$ (C) $\frac{2010}{2011}$ (D) 1 (E) -2011

24. В коробе имеется некоторое количество красных и зеленых шаров. Если мы случайно выберем оттуда два шара, вероятность того, что они будут одного цвета, равна 1/2. Какое из перечисленных ниже чисел может быть общим числом шаров в коробке?

- (A) 81 (B) 101 (C) 1000 (D) 2011 (E) 10001

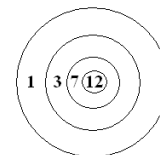
25. Авиакомпания не взимает плату за багаж, если вес багажа не превышает определенный вес. За каждый дополнительный килограмм взимается одна и та же плата. Багаж четы Аркопянов весил 60 кг, и они доплатили 3 евро. Багаж г-на Погосяна весил столько же, но он доплатил 10,50 евро. Какой максимальный вес багажа может взять с собой один пассажир без доплаты?

- (A) 10 кг (B) 18 кг (C) 20 кг (D) 25 кг (E) 39 кг

26. Чему равно наименьшее возможное натуральное значение выражения $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$, если различные буквы обозначают различные ненулевые цифры, и одной и той же букве всегда соответствует одна и та же цифра?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

27. Робин Гуд стреляет три раза в мишень, получая за каждый выстрел очки, показанные на рисунке. Все стрелы попадают в мишень. Сколько различных очков можно получить при этом?



- (A) 13 (B) 17 (C) 19 (D) 20 (E) 21

28. Пусть a, b и c натуральные числа, такие, что $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Чему равно минимально возможное число делителей abc (включая 1 и abc)?

- (A) 30 (B) 49 (C) 60 (D) 77 (E) 1596

29. В таблице 4x5 написаны двадцать различных натуральных чисел. Любые два соседних числа (находящиеся в клетках с общей стороной) имеют общий делитель больше 1. Пусть n наибольшее число в таблице. Найдите наименьшее возможное значение n.

- (A) 21 (B) 24 (C) 26 (D) 27 (E) 40

30. Куб 3x3x3 состоит из 27 идентичных маленьких кубов. Плоскость перпендикулярна диагонали большого куба и проходит через его центр. Сколько маленьких кубиков пересекает эта плоскость?

- (A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21